E.N.S.I. CHIMIE CENTRE 1984

# MATHÉMATIQUES

## DEUXIÈME PARTIE

DURÉE : 2 heures

---

NOTATIONS GÉNÉRALES :

On désigne par :

R l'ensemble des nombres réels;
$\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs;
N l'ensemble des entiers;
N* l'ensemble des entiers strictement positifs;
ln le logarithme népérien.

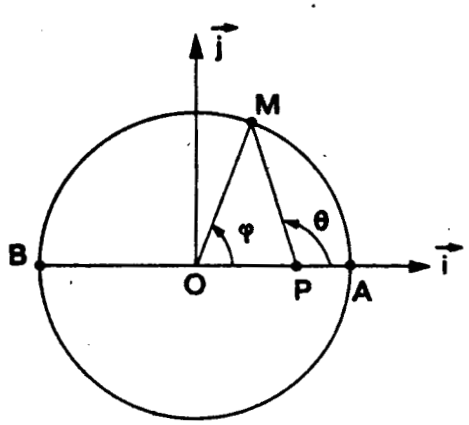
Les candidats pourront aussi utiliser la notation Log pour désigner le logarithme népérien.

## PREMIÈRE PARTIE

Dans un plan affine euclidien réel $\mathcal{E}$ (d'espace vectoriel associé E) orienté, rapporté à un repère orthonormal positif $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ on considère un cercle (C) centré en O et de rayon $r$ $(r \in \mathbb{R}_+^*)$.

Soient A et B deux points fixes de (C) diamétralement opposés tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = 0 \pmod{2\pi}$

Soient P un point fixe du segment OA (situé entre O et A) et M un point quelconque de (C)




.../...

Désignant de façon générale par $\| \vec{V} \|$ la norme euclidienne associée à un vecteur $\vec{V}$ de E, on pose :

$$\| \vec{PA} \| = a \qquad (0 < a < r)$$

$$\| \vec{PB} \| = b \qquad (r < b < 2r)$$

1° Soit $\varphi$ l'angle défini par :

$$\varphi = (\vec{i}, \vec{OM})$$

Montrer que :

$$\| \vec{PM} \| = \left( a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

2° Soit I $(a, b)$ l'intégrale définie par :

$$I(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{r \, d\varphi}{\left( a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Montrer que :

$$I(a, b) = I(b, a)$$

3° Soit $\theta$ l'angle des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{PM}$ :

$$\theta = (\vec{i}, \vec{PM})$$

Établir la relation :

$$I(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{r \, d\theta}{\left[ r^2 - \left( \frac{b - a}{2} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}}$$

(On rappelle aux candidats qu'il peut être avantageux d'admettre un résultat figurant dans l'énoncé pour traiter les questions suivantes.)

On pose :

$$I_0(a, b) = \frac{2}{a + b} I(a, b)$$

Déduire de ce qui précède :

$$I_0(a, b) = I_0 \left( \sqrt{ab}, \frac{a + b}{2} \right)$$

.../...

## DEUXIÈME PARTIE

On définit les deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \qquad \begin{cases} u_n = \sqrt{u_{n-1}\, v_{n-1}} \\ v_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ , $a \in \mathbb{R}_+^*$ , $b \in \mathbb{R}_+^*$

1° Montrer que, quel que soit $n \in \mathrm{N}^*$ :

$$0 < u_n \leqslant v_n$$

2° En déduire que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites respectivement croissante et décroissante convergeant toutes les deux vers une limite commune que l'on note $l\,(a, b)$.

3° *Application numérique :*

On pose $\dfrac{a}{r} = 0{,}4$ $\qquad \dfrac{b}{r} = 1{,}6$.

Déterminer une valeur approchée à $10^{-4}$ près de $\mathrm{I}\,(a, b)$. [On admettra que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_0(u_n, v_n) = \mathrm{I}_0(l\,(a, b), l\,(a, b))$ ].

## TROISIÈME PARTIE

Soient $p$ et $q$ deux réels de l'intervalle ouvert $]0{,}1[$.

1. On définit une suite réelle positive $(q_n)$ à partir des relations :

$$q_o = q$$

$$q_n = \frac{2\sqrt{q_{n-1}}}{1 + q_{n-1}}, \qquad n \in \mathrm{N}^*.$$

1.1. Montrer que la suite $(q_n)$ converge vers une limite que l'on précisera.

1.2. Montrer que les relations

$$p_0 = p$$

$$p_n = \sqrt{1 - q_n^2}, \quad n \in \mathrm{N}^*$$

définissent une suite réelle qui converge vers une limite que l'on déterminera.

Démontrer que la série de terme général $p_n$ $(n \in \mathrm{N})$ est convergente.

1.3. On considère la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{2}{1 + q_n}\right) \qquad n \in \mathrm{N}$$

Montrer que cette série est convergente.

.../...

2. On pose :

$$p = \frac{b - a}{b + a} \qquad q = \sqrt{1 - p^2}$$

Soit J $(p)$ l'intégrale définie par :

$$J(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{(1 - p^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}$$

2.1. Établir une relation liant I $(a, b)$ et J $(p)$.

2.2. Démontrer qu'il existe deux constantes $\alpha$ et $\beta$ dépendant respectivement de $p$ et $q$ telles que :

$$J(p) = \alpha J\left(\frac{2\sqrt{p}}{1 + p}\right) = \beta J\left(\frac{1 - q}{1 + q}\right)$$

2.3. Après avoir montré que :

$1 \leqslant J(p_n) \leqslant \dfrac{1}{q_n}$, calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} J(p_n)$

Démontrer alors que le produit :

$\Pi_n = \prod\limits_{i=0}^{n} \left(\dfrac{2}{1 + q_i}\right)$ tend vers une limite que l'on déterminera.

3. *Application numérique.*

Reprenant les données numériques précédentes :

$$\frac{a}{r} = 0{,}4 \qquad \frac{b}{r} = 1{,}6$$

déterminer l'approximation $I^*(a, b)$ de I $(a, b)$ que donnent des calculs à $10^{-5}$ près sur $\Pi_n$.

[On ne cherchera pas à justifier l'erreur estimée sur I $(a, b)$.]